4/27: 線形微分方程式系

二つの実数値関数 $y_1(t), y_2(t)$ について 1 階の線形微分方程式系

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで a, b, c, d は定数であるとする．

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置くと, 微分方程式系 (1) は

$$Y' = AY \tag{2}$$

と行列で表すことができる．常微分方程式の解の存在と一意性より, 初期条件 $y_1(t) = \alpha, y_2(t) = \beta$ によって解は一意的に定まり

$$Y = e^{tA} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

と書き表すことができる．別な手法として, 方程式 (2) を線形変換することによって簡単に解を求めることができる．P を正則な 2×2 行列とし

$$Z = PY$$

とおくと, 方程式 (2) は

$$Z' = PAP^{-1}Z$$

となる．このとき PAP^{-1} ができるだけ簡単な形になるように行列 P を選びたい．例えば, A が対称行列 $(A^t = A)$ であるとすると、線形代数でやったようにある直交行列 P によって PAP^{-1} は対角行列になる．ここで行列 P^{-1} の各列 v_1, v_2 はもとの行列 A の固有ベクトルであることを思い出そう．

$$A \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = AP^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

(y_1, y_2) 平面内に曲線 $(y(t), y'(t))$ のグラフを描くことによって, これらの固有ベクトルの方向を “視覚化”することができる.

2 階の方程式

$$y'' + py' + qy = 0$$

は $y_1 = y$, $y_2 = y'$ と置くことによって, (2) のようなタイプの方程式系を与える. つまり

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ここで p と q は定数であると仮定する. 特に, よく知られた方程式

$$y'' = -ky \tag{3}$$

$(k > 0)$ はこのようにして解くことができる. 関数 $y = \sin\sqrt{k}t$ と $y = \cos\sqrt{k}t$ は方程式 (3) の二つの線形独立な解である. しかし, どちらの場合も曲線 $(y(t), y'(t))$ のグラフは円であり, 固有ベクトルは “視覚化”することができない. これは, 固有ベクトルが実係数ベクトルでないためである. つまり, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

は対称行列ではないことが起因している.

対角化できない場合でも行列 A を Jordan 標準形にすることによって解を決定する方法がある. 任意の行列 A について,

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となるような行列 P をとることができる. a, b, c, d が実数であると仮定していたので, 前者の場合には固有値 λ_1, λ_2 は共に実数であるかまたは共役な複素数の組となり, 後者の場合には λ は実数になる. 双方の場合について方程式系を解くことによってグラフの形を大雑把に分類することができる. (さらに細かく分類することが必要である.)