Willmore予想について

安藤　直也 (熊本大学理学部数理科学科)

0　はじめに

$\mathbf{R}^3$ にはめこまれたトーラスの全平均曲率は $2\pi^2$ 以上でありかつ等号成立は S^3 の Clifford トーラスの立体射影による像と $\mathbf{R}^3$ において共形同値であるときに限ることが期待されている．これは Willmore 予想としてしられている．最近 Schmidt によって Willmore 予想の肯定的な解答を与える論文が発表された ([Sc])．本稿の目的は Willmore 予想についてこれまでにしられている事柄を説明することである．なお本稿は筆者が日本学術振興会特別研究員 (PD) として東京都立大学に所属した際作成したものに修正・加筆をしたものである．

1　Willmore 汎関数

M をコンパクトかつむきづけ可能な 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \to \mathbf{R}^3$ を M の $\mathbf{R}^3$ へのはめこみとする．また H を ι に関する M の平均曲率とする．このとき $\mathcal{W}(\iota)$ によって ι に関する M の全平均曲率を表す:

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^2\, dA,$$

ただし dA は ι によって導かれた計量に関する M の面積要素である．$\mathcal{W}$ は M の $\mathbf{R}^3$ への各はめこみに実数を一つ対応させるいわゆる汎関数であるが, この汎関数 $\mathcal{W}$ を Willmore 汎関数とよぶ．次の定理がなりたつ:

定理 1.1 ([Wi1], [Wi2]) $\mathcal{W}(\iota) \geqq 4\pi$ であり, さらに $\mathcal{W}(\iota) = 4\pi$ は $\iota(M)$ が全臍的な球面 (round sphere) であるときに限る．

M として種数が 1 のものを考えたい．Willmore は [Wi1] において次の式で定義される $\mathbf{R}^3$ のトーラス $T_{a,b}$ $(a > b > 0)$ の全平均曲率を調べた:

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \qquad y = (a + b\cos u)\sin v, \qquad z = b\sin u.$$

次がなりたつ:

$$\int_{T_{a,b}} H^2\, dA = \frac{\pi^2}{(b/a)\sqrt{1-(b/a)^2}}.$$

この右辺は $b = a/\sqrt{2}$ のときに $2\pi^2$ に等しく, $b \neq a/\sqrt{2}$ のときに $2\pi^2$ より真に大きい. よって

$$\int_{T_{a,b}} H^2\, dA \geqq 2\pi^2$$

であり, さらに等号成立は $b = a/\sqrt{2}$ のときに限る. より一般に, 次の定理がなりたつ:

定理 1.2 ([ST], [Wi3]) C を $\mathbf{R}^3$ の単純閉曲線とする. また T_C は C の開管状近傍の境界でありかつはめこまれた曲面であるものとする. このとき T_C の全平均曲率は $2\pi^2$ 以上である:

$$\int_{T_C} H^2\, dA \geqq 2\pi^2.$$

さらに等号成立は T_C がある正数 $a > 0$ に対し $T_{a,a/\sqrt{2}}$ と合同であるときに限る.

M を本節最初に与えられたようなものとし, $\iota : M \to \mathbf{R}^n$ を M の $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率ベクトルとする. このとき ι に関する M の全平均曲率

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M |H|^2\, dA$$

を考える. 次の定理がなりたつ:

定理 1.3 X を $\mathbf{R}^n$ の共形変換とする. このとき $X \circ \iota$ に関する M の全平均曲率 $\mathcal{W}(X \circ \iota)$ は ι に関する M の全平均曲率 $\mathcal{W}(\iota)$ に等しい:

$$\mathcal{W}(X \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota).$$

注意 $\mathbf{R}^n$ の共形変換は相似変換と反転の有限積によって表される. ただし反転は反転の中心を無限遠点に対応させているので, 厳密には $\mathbf{R}^n$ の一点コンパクト化 (n 次球面) の共形変換とよぶべきであろう. しかしながら "$\mathbf{R}^n$ の共形変換" といういい方を以下においても使用することにする.

参考 $n = 3$ に対する定理 1.3 は White によって示された ([Wh]). ただし Blaschke によっても示されていたことがしられている ([Bl]). 一般の $n \geqq 3$ に対しては Chen によって示された ([Chen3]).

$S^n(1)$ を $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を中心とする半径 1 の超球面とし, $\pi : S^n(1) \to \{x_{n+1} = -1\}$ を点 $p_+ := (0, \ldots, 0, 1)$ から超平面 $\{x_{n+1} = -1\}$ への立体射影とする. また ι は M の $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめこみで, $\iota(M) \subset S^n(1) \setminus \{p_+\}$ をみたすものとする. このとき $\pi \circ \iota$ を M の $\mathbf{R}^n$ への

はめこみとみなすことができる. π は p_+ を中心とする半径 2 の反転を $S^n(1)$ に制限したものであるので, 定理 1.3 から次をえる:

系 1.4 $\mathcal{W}(\pi \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota)$.

注意 系 1.4 において, $\mathcal{W}(\iota)$ は ($S^n(1)$ ではなく)$\mathbf{R}^{n+1}$ における平均曲率ベクトルの長さの二乗を M 上積分したものである.

定理 1.2 および定理 1.3 を考慮すると, 一般に次のような予想が肯定的に解決されることが期待される:

Willmore 予想 ([Wi1]) M の種数が 1 であるとき, M の $\mathbf{R}^3$ へのはめこみ ι に対し $\mathcal{W}(\iota) \geqq 2\pi^2 (> 4\pi)$ がなりたちさらに等号成立は $\iota(M)$ が $\mathbf{R}^3$ の共形変換によって $T_{\sqrt{2},1}$ と写りあうときに限る.

2 Willmore 曲面

M および ι を第 1 節の最初に与えられたようなものとし, ξ を (ι に関する)M 上の単位法ベクトル場とする. M 上の滑らかな関数 f に対し, ι_f は $M \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^3$ への滑らかな写像で各 $p \in M$ に対し $\iota_f(p, 0) = \iota(p)$ および $(\partial \iota_f / \partial t)(p, 0) = f(p)\xi(p)$ をみたすものとする. また $(p, t) \in M \times \mathbf{R}$ に対し, $\iota_{f,t}(p) := \iota_f(p, t)$ とおく. このとき 0 を含む開区間 I が存在して, 各 $t \in I$ に対し $\iota_{f,t}$ は M の $\mathbf{R}^3$ へのはめこみである. $t \in T$ に対し,

$$w_f(t) := \mathcal{W}(\iota_{f,t})$$

とおく. このとき ι が <u>Willmore はめこみ</u> であるとは, 任意の f に対し次がなりたつときにいう:

$$\frac{dw_f}{dt}(0) = 0.$$

すなわち Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の第一変分が 0 となるようなはめこみが Willmore はめこみである. また ι が Willmore はめこみであるとき, M と ι の対 (M, ι) または M の ι による像 $\iota(M)$ のことを <u>Willmore 曲面</u> とよぶ (すなわち Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の停留曲面が Willmore 曲面である). Willmore 曲面については次の定理がなりたつ:

定理 2.1 ([Chen2]) M, ι および H を第 1 節の最初に与えられたようなものとし, K, Δ をそれぞれ (ι によって導かれた計量に関する)M の Gauss 曲率および M 上の Laplacian とする. このとき ι が Willmore はめこみであることと M 上次の方程式がなりたつことは

同値である:

$$\Delta H + 2\bigl(H^2 - K\bigr)H = 0. \tag{1}$$

(1) は Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式である.

参考　M をコンパクトかつむきづけ可能な $(n-1)$ 次元可微分多様体 $(n \geqq 3)$ とし, $\iota : M \to \mathbf{R}^n$ を M の $\mathbf{R}^n$ へのはめこみとする. また H を (ι に関する)M の平均曲率とする. そして

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^{n-1}\, dV, \qquad \mathcal{W}_*(\iota) := \int_M |H|^{n-1}\, dV$$

とおく, ただし dV は ι によって導かれた計量に関する M の体積要素である. このとき Chen は [Chen1] において $\mathcal{W}_*(\iota)$ は $(n-1)$ 次単位球面の体積以上でありかつ等号成立は $\iota(M)$ が全臍的な超球面であるときに限ることを示した (定理 1.1 の一般化). また Chen は [Chen2] において汎関数 $\mathcal{W}$ の第一変分を 0 にするようなはめこみに対する Euler-Lagrange 方程式は次で与えられることを示した:

$$\Delta H^{n-2} + \bigl\{(n-1)(n-2)H^2 - S\bigr\}H^{n-2} = 0, \tag{2}$$

ただし S, Δ はそれぞれ ι によって導かれた計量に関する M のスカラー曲率および M 上の Laplacian である. $n = 3$ に対する方程式(2) がちょうど方程式(1) である.

M を第 1 節の最初に与えられたようなものとし, $\iota : M \to S^3$ を M の単位 3 次球面 S^3 へのはめこみとする. また H を M の S^3 における平均曲率とする. そして $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota) := \int_M \bigl(H^2 + 1\bigr)\, dA. \tag{3}$$

汎関数 $\mathcal{W}_1$ の第一変分を 0 にするようなはめこみのことを $\bigl(S^3$ への$\bigr)$Willmore はめこみとよぶ. $\iota_1 : S^3 \to \mathbf{R}^4$ は S^3 の $\mathbf{R}^4$ への等長なうめこみで, $\iota_1\bigl(S^3\bigr) = S^3(1)$ がなりたつものとする. このとき $\iota_1 \circ \iota$ は M の $\mathbf{R}^4$ へのはめこみとなるが, M の $\mathbf{R}^4$ における平均曲率ベクトルの長さの二乗とは(3) の右辺の被積分関数 $H^2 + 1$ で与えられることに注意すると,

$$\mathcal{W}_1(\iota) = \mathcal{W}(\iota_1 \circ \iota)$$

がわかる. よって系 1.4 から,

$$\mathcal{W}_1(\iota) = \mathcal{W}(\pi \circ \iota_1 \circ \iota)$$

をえる. よって次の命題をえる:

命題 2.2 ([We]) S^3 の Willmore 曲面を立体射影 π で $\mathbf{R}^3$ にうつしたものはまた Willmore 曲面である.

Weiner は S^3 への Willmore はめこみ ι に対する Euler-Lagrange 方程式は次で与えられることを示した ([We]):

$$\Delta H + 2\bigl(H^2 - K_1\bigr)H = 0, \tag{4}$$

ただし K_1 は S^3 における ι に関する M の Weingarten 写像の行列式である ((1) と比べていただきたい). Lawson は [L2] において各非負整数 g に対しコンパクトむきづけ可能かつ種数が g の極小曲面を S^3 の中で構成した. S^3 への Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式(4) によると S^3 の極小曲面は Willmore 曲面であるので, 命題 2.2 を用いて次の定理をえる:

定理 2.3 各非負整数 g に対し, コンパクトむきづけ可能かつ種数が g の Willmore 曲面が $\mathbf{R}^3$ の中に存在する.

S^3 の Clifford トーラスとは次の式で定義される極小曲面である:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, \qquad x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}.$$

M の種数は 1 であるとし, ι_{Cl} は M の S^3 へのうめこみで $\iota_{\mathrm{Cl}}(M)$ が Clifford トーラスであるようなものとする. M の S^3 へのはめこみ全体からなる集合を $\mathrm{Imm}(M, S^3)$ で表し, $\mathrm{Imm}(M, S^3)$ に C^k 位相を導入する (ただし $k \in \mathbf{N}$ は十分大きいものとする). Weiner は汎関数 $\mathcal{W}_1$ の第二変分を計算し, 特に次の定理をえた:

定理 2.4 ([We]) $\mathrm{Imm}(M, S^3)$ における ι_{Cl} のある近傍 $\mathcal{O}$ においては $\mathcal{W}_1 \geqq 2\pi^2$ でありかつ $\mathcal{W}_1 = 2\pi^2$ がなりたつのは $\mathcal{O}$ の元が M の微分同相写像と ι_{Cl} と S^3 の共形変換の合成によって表されるときに限る.

Clifford トーラスの立体射影 π による像は $T_{\sqrt{2},1}$ である. $T_{\sqrt{2},1}$ は $\mathcal{W}$ が $2\pi^2$ を達成するトーラスであり, Willmore 予想においては $T_{\sqrt{2},1}$ は $\mathcal{W}$ が $2\pi^2$ を達成する $\bigl(\mathbf{R}^3$ の共形変換による像を除いて$\bigr)$ 唯一のトーラスであることが期待されている. 定理 2.4 から, 「$T_{\sqrt{2},1}$ の近傍においては Willmore 予想は肯定的に解決される」ということができる.

定理 2.3 によると $\mathbf{R}^3$ のコンパクトな Willmore 曲面は豊富に存在しそしてこの根拠は S^3 のコンパクトな極小曲面の存在であるが, それでは $\mathbf{R}^3$ の任意のコンパクトな Willmore

曲面は S^3 の極小曲面の立体射影による像と $\mathbf{R}^3$ の共形変換によって互いに写りあうかどうかをしりたくなる. Pinkall は [P1] において S^3 の Hopf トーラスを調べた, ただし S^3 の Hopf トーラスとは S^2 の閉曲線の Hopf 写像 $S^3 \to S^2$ による逆像のことである (S^2 の各閉曲線が S^3 の Hopf トーラスを一つ定める). Hopf トーラスは平坦である, つまり Gauss 曲率が恒等的に零である. よって Hopf トーラスが Clifford トーラスと S^3 において合同ではないならば, その Hopf トーラスは S^3 の極小曲面ではない ([L1]). Pinkall は [P1] において S^3 にうめこまれた Hopf トーラスには Willmore 曲面であるものが (たくさん) 存在することを示しさらにそのような Hopf トーラスのうち S^3 の極小曲面とはいかなる共形変換によっても互いに写りあわないものが存在することを示した. 命題 2.2 からこのような Hopf トーラスの立体射影による像は $\mathbf{R}^3$ の Willmore 曲面であることがわかるので, 以上から次の定理をえる:

定理 2.5 ([P1]) $\mathbf{R}^3$ のコンパクトな Willmore 曲面で S^3 の極小曲面の立体射影による像と $\mathbf{R}^3$ の共形変換によって互いに写りあわないものが存在する.

3 固定された 2 次元多様体に対する Willmore 汎関数の下限

M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \to \mathbf{R}^n$ を M の $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとする. M がむきづけ可能ではないならば, M 上全体で平均曲率ベクトルを定義することはできない. しかしながら M の各点に対し平均曲率ベクトルの長さを対応させる関数は M 上全体で定義される. 従って ι に関する M の全平均曲率 $\mathcal{W}(\iota)$ も M がむきづけ可能かどうかによらず定義される.

M を上述のものとし, M の共形構造を一つ固定する. そして $\iota : M \to S^n$ を M の単位 n 次球面 S^n への共形的なはめこみとする. また G_n を S^n の共形変換群とする (G_n は $O(n+1,1)$ と同形である). このとき ι についての M の <u>n-共形面積 (n-conformal area)</u> $A_c(n,\iota)$ とは次のように定義される:

$$A_c(n,\iota) := \sup_{X \in G_n} \int_M dA_X,$$

ただし dA_X は $X \circ \iota$ によって導かれた計量に関する M の面積要素である. そして M の <u>n-共形面積</u> $A_c(n,M)$ とは次のように定義される:

$$A_c(n,M) := \inf\{A_c(n,\iota)\ ;\ \iota : M \to S^n \text{ は共形的なはめこみ}\}.$$

このとき Li-Yau は次の定理を示した:

定理 3.1 ([LY]) M をコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体とする．また λ_1 を M 上の Laplacian の第一固有値とし, dA を M の面積要素とする．そして M の S^n への共形的なはめこみが存在するものとする．このとき次がなりたつ:

$$\lambda_1 \int_M dA \leqq 2A_c(n, M).$$

さらに等号が成立するならば, M の計量を定数倍することによって M の S^n への等長かつ極小なはめこみをみいだすことができそしてこのとき $\lambda_1 = 2$ がなりたつ．

証明 (i) $\iota : M \to S^n$ を M の S^n への共形的なはめこみとする．S^n を $\mathbf{R}^{n+1}$ の単位超球面 $S^n(1)$ と同一視する．また $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ を $\mathbf{R}^{n+1}$ の直交座標系とする．このとき G_n の元 X_ι が存在して任意の $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対し

$$\int_M x_i \circ X_\iota \circ \iota \, dA = 0$$

がなりたつことを示すことができる．以下 $X_\iota \circ \iota$ を単に ι で表す．このとき次がなりたつ:

$$\lambda_1 \int_M (x_i \circ \iota)^2 \, dA \leqq \int_M |\nabla (x_i \circ \iota)|^2 \, dA, \tag{5}$$

ただし M 上の滑らかな関数 f に対し $|\nabla f|$ は f の (M の計量に関する) 勾配ベクトル場の長さを表すものとする．
(ii) $\left|\tilde{\nabla} f\right|$ は f の (ι によって導かれた計量に関する) 勾配ベクトル場の長さを表すものとし, また dA_ι は ι によって導かれた計量に関する M の面積要素を表すものとする．このとき 2 次元多様体上の Dirichlet 積分の共形不変性に注意すると, M 上の滑らかな関数 f に対し次がなりたつことがわかる:

$$\int_M |\nabla f|^2 \, dA = \int_M \left|\tilde{\nabla} f\right|^2 dA_\iota.$$

よって次がなりたつ:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla (x_i \circ \iota)|^2 \, dA = \sum_{i=1}^{n+1} \int_M \left|\tilde{\nabla} (x_i \circ \iota)\right|^2 dA_\iota = 2 \int_M dA_\iota \leqq 2A_c(n, \iota). \tag{6}$$

よって(5), (6) および

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x_i \circ \iota)^2 \, dA = \int_M dA$$

を用いて,

$$\lambda_1 \int_M dA \leqq 2A_c(n, \iota)$$

をえる．これより定理 3.1 の不等式をえる．

(iii) 定理 3.1 の不等式において等号が成立するものとする．そして M の計量を定数倍して, $\lambda_1 = 2$ がなりたつものとする．このとき次がなりたつ:

$$\int_M dA = A_c(n, M). \tag{7}$$

$\{\iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は M の S^n への共形的なはめこみの列で,

$$\lim_{k\to\infty} A_c(n, \iota_k) = A_c(n, M) \tag{8}$$

をみたしかつ任意の $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ および任意の $k \in \mathbf{N}$ に対し次をみたすものとする:

$$\int_M x_i \circ \iota_k \, dA = 0. \tag{9}$$

(9) から,

$$2\int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA \leqq \int_M |\nabla(x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA \tag{10}$$

がわかる．よって次がなりたつ:

$$2\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \int_M |\nabla(x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA \leqq 2A_c(n, \iota_k). \tag{11}$$

よって各 $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対し, $\{x_i \circ \iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は Sobolev 空間 $L_1^2(M)$ の有界集合である．一般に Hilbert 空間の有界集合は弱点列コンパクトであるので, $\{x_i \circ \iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ のある部分列は $L_1^2(M)$ において弱収束していることがわかる．さらにうめこみ $L_1^2(M) \to L^2(M)$ はコンパクト写像であるので, $\{x_i \circ \iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ のさらにある部分列が $L^2(M)$ において強収束していることがわかる．その収束列をそのまま $\{x_i \circ \iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ で表し, またその極限を f_i で表す: $\{x_i \circ \iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は f_i に $L^2(M)$ において強収束していてかつ $L_1^2(M)$ において弱収束している．このとき次がなりたつ:

$$\lim_{k\to\infty} \int_M (x_i \circ \iota_k)^2 \, dA = \int_M f_i^2 \, dA, \tag{12}$$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_M |\nabla(x_i \circ \iota_k)|^2 \, dA \geqq \int_M |\nabla f_i|^2 \, dA. \tag{13}$$

また(9) から,

$$\int_M f_i \, dA = 0$$

がわかる．よって

$$2\int_M f_i^2\,dA \leqq \int_M |\nabla f_i|^2\,dA \tag{14}$$

がなりたつことがわかる．また(7), (8) および(11) を用いて

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\int_M |\nabla(x_i\circ\iota_k)|^2\,dA = \lim_{k\to\infty}2\sum_{i=1}^{n+1}\int_M (x_i\circ\iota_k)^2\,dA$$

がなりたつことがわかるので, (10) を用いて

$$\lim_{k\to\infty}\int_M |\nabla(x_i\circ\iota_k)|^2\,dA = 2\lim_{k\to\infty}\int_M (x_i\circ\iota_k)^2\,dA \tag{15}$$

をえる．よって(12)∼(15) から

$$\lim_{k\to\infty}\int_M |\nabla(x_i\circ\iota_k)|^2\,dA = \int_M |\nabla f_i|^2\,dA$$

がわかり，$\{x_i\circ\iota_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は $L_1^2(M)$ において強収束していることがわかる．このとき f_i は M 上の Laplacian の第一固有値 2 に対する固有関数であることがわかる．よって f_i は滑らかである．また $\{f_i\}_{i=1}^{n+1}$ は M 上 $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = 1$ をみたすが, M から S^{n+1} への写像 f を $f := (f_1,\ldots,f_{n+1})$ と定義するとき, f は共形的なはめこみである．さらに $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = 1$ の両辺に Laplacian を作用させることによって, $\sum_{i=1}^{n+1}|\nabla f_i|^2 = 2$ がわかる．よって f は等長である．Takahashi の定理から, f は極小であることがわかる． □

また次の命題がなりたつ:

命題 3.2 ([LY]) M をコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体とし, dA を M の面積要素とする．また $\iota_0 : M \to S^n$ を M の S^n $(n \geqq 3)$ への等長かつ極小なはめこみとする．このとき次がなりたつ:

$$A_c(n,\iota_0) = \int_M dA.$$

証明　$\iota : M \to S^n$ を M の単位 n 次球面 S^n への等長なはめこみとする．また H を M の S^n における平均曲率ベクトルとする．そして $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota) := \int_M \left(|H|^2+1\right)dA.$$

このとき定理 1.3 および系 1.4 を用いて，任意の $X \in G_n$ に対し次がなりたつことがわかる:

$$\mathcal{W}_1(X\circ\iota) = \mathcal{W}_1(\iota).$$

よって次がえられる:

$$A_c(n, \iota) \leqq \mathcal{W}_1(\iota). \tag{16}$$

特に $\iota = \iota_0$ であるならば,

$$A_c(n, \iota_0) \leqq \int_M dA$$

がなりたつ. よって $A_c(n, \iota_0)$ の定義より,

$$A_c(n, \iota_0) = \int_M dA$$

をえる. □

定理 3.1 および命題 3.2 を用いて, 次をえる:

系 3.3 ([LY]) M はコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体で, M 上の Laplacian の第一固有値は 2 であるものとする. また M の S^n $(n \geqq 3)$ への等長かつ極小なはめこみ ι が存在するものとする. このとき次がなりたつ:

$$\int_M dA = A_c(n, M) = A_c(n, \iota).$$

$\mathcal{F}$ は $\mathbf{R}^2$ の部分集合で, $0 \leqq x \leqq 1/2$, $y > 0$ および $x^2 + y^2 \geqq 1$ をみたす $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ のようなもの全体からなるものとする. また $(x, y) \in \mathcal{F}$ に対し, $\{(1, 0), (x, y)\}$ によって生成される格子が定める平坦トーラスを $T(x, y)$ で表す. このときコンパクト, むきづけ可能かつ種数が 1 の 2 次元 Riemann 多様体 M に対し, ある $(x, y) \in \mathcal{F}$ が存在して M と $T(x, y)$ は共形同値となる.

系 3.4 ([LY]) M をコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体とする. このとき次がなりたつ:

(a) M が S^2 に同相であるならば, $A_c(n, M) = 4\pi$ である;

(b) M が射影平面に同相でありかつ $n \geqq 4$ であるならば, $A_c(n, M) = 6\pi$ である;

(c) $(x, y) \in \mathcal{F}$ が $y \leqq 1$ をみたすものとする. このとき $A_c(n, T(x, y)) \geqq 2\pi^2$ がなりたつ. さらに等号が成立するならば, $y = 1$ がなりたつ.

系 1.4 および(16) を用いて, 共形面積と全平均曲率との関係について次の補題をえる:

補題 3.5 ([LY]) $\iota : M \to \mathbf{R}^n$ を M の $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとし, $A_c(n, M)$ を ι によって導かれた計量が定める共形構造に関する M の n-共形面積とする. このとき次がなりたつ:

$$\mathcal{W}(\iota) \geqq A_c(n, M).$$

定理 3.1, 系 3.4 および補題 3.5 を用いて, 次の定理をえる:

定理 3.6 ([LY]) $(x, y) \in \mathcal{F}$ が $y \leqq 1$ をみたすものとする. また ι を $T(x, y)$ から $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ への共形的なはめこみとする. このとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 2\pi^2$ がなりたつ. さらに等号が成立するならば, ι は M から S^n への極小挿入 ι_0 と S^n から $\mathbf{R}^n$ への立体射影と $\mathbf{R}^n$ の共形変換の合成によって表されかつ ι_0 によって導かれた計量に関する M 上の Laplacian の第一固有値は 2 である.

Montiel-Ros は [MR] において次の命題を示した:

命題 3.7 ([MR]) 任意の $(x, y) \in \mathcal{F}$ に対し, 次がなりたつ:

$$A_c(n, T(x, y)) \geqq \frac{4\pi^2 y}{1 + y^2 + x^2 - x}.$$

補題 3.5 および命題 3.7 を用いて, 次を定理をえる:

定理 3.8 ([MR]) $(x, y) \in \mathcal{F}$ が $2y \geqq 1 + y^2 + x^2 - x$ をみたすものとする. また ι を $T(x, y)$ から $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ への等長挿入とする. このとき次がなりたつ:

$$\mathcal{W}(\iota) \geqq \frac{4\pi^2 y}{1 + y^2 + x^2 - x} \geqq 2\pi^2.$$

参考 命題 3.7 を用いて, 系 3.4 の (c) において等号が成立するための必要十分条件は $(x, y) = (0, 1)$ であることがわかる. また Montiel-Ros は [MR] において次のことを示している: コンパクトな曲面の共形構造を一つとったとき, その中に次の条件をみたす計量が存在するならばそのような計量は一意に定まる: その計量に関する Laplacian の第一固有値に対する固有関数によって単位球面への極小挿入が構成される. $T(0, 1)$ の単位球面への極小挿入の例は Clifford トーラスによって与えられるので, 定理 3.6 の等号成立の場合に ι_0 によって導入される計量は平坦であることがわかる. このとき第一固有値の重複度は 4 であるから M の ι_0 による像は S^3 に含まれることがわかり, さらに S^3 に極小挿入された平坦トーラスは Clifford トーラスに限る ([L1]) ので, 定理 3.6 の等号成立の場合の ι_0 による M の像は Clifford トーラスであることがわかる.

参考 Montiel-Ros は [MR] において $y \in \left[1, \sqrt{5/3}\right]$ であるならば

$$A_c(3, T(0,y)) = \frac{4\pi^2 y}{1+y^2}$$

がなりたつことを示している．よって $y \neq 1$ であるならば, $A_c(3, T(0,y)) < 2\pi^2$ がなりたつ．このことは補題 3.5 を用いて Willmore 予想を完全に解決することはできないことを示している．

定理 3.1, 系 3.4 および補題 3.5 を用いて, 次の定理をえる:

定理 3.9 ([LY]) M を射影平面とする．また $\iota : M \to \mathbf{R}^n$ を M の $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとする．このとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 6\pi$ がなりたつ．さらに等号成立は $n \geqq 4$ でありかつ $\iota(M)$ が S^4 の Veronese 曲面の立体射影による像と $\mathbf{R}^n$ の共形変換で写りあうときに限る．

参考 Chen は [Chen4] において $n = 4$ であるときに $\mathcal{W}(\iota) \geqq \pi(2+\pi)$ がなりたつことを示した．定理 3.9 はこの結果を最良の評価をもって改良したことになる．

定理 3.9 において, $n = 3$ である場合に $\mathcal{W}(\iota)$ の評価は最良ではない可能性が残されている．まず次の定理に注意する:

定理 3.10 ([LY]) M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とする．また $\iota : M \to \mathbf{R}^n$ は M の $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみで, $\iota(M)$ のある点の ι による逆像は k 個の点 $(k \in \mathbf{N})$ からなるものとする．このとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 4k\pi$ がなりたつ．

注意 定理 3.10 から特に, $\mathcal{W}(\iota) < 8\pi$ であるならば ι はうめこみであることがわかる．

M が射影平面でありかつ $n = 3$ であるならば, 定理 3.10 における k は $\iota(M)$ のある点で 3 以上であることがしられている ([Ba])．よってこのとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 12\pi$ がなりたつ．そして Kusner は $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ である ι を発見した ([K1], [K2])．さらに Bryant は $\mathcal{W}$ が 12π を達成する射影平面から $\mathbf{R}^3$ への全てのはめこみからなるモジュライ空間を描写した ([Br2])．より一般に, コンパクトな 2 次元可微分多様体 M に対し

$$\mathcal{W}_M := \inf \left\{ \mathcal{W}(\iota)\ ;\ \iota : M \to \mathbf{R}^3 \text{ は } M \text{ の } \mathbf{R}^3 \text{ へのはめこみ} \right\}$$

とおく．このとき Kusner は [K2] において次の定理を示した:

定理 3.11 ([K2]) M がむきづけ可能であるならば $\mathcal{W}_M < 8\pi$ がなりたち, M がむきづけ

不可能であるならば次がなりたつ:

$$\mathcal{W}_M < \begin{cases} 12\pi & (M \text{ の Euler 数が偶数である場合}), \\ 16\pi & (M \text{ の Euler 数が奇数である場合}). \end{cases}$$

注意 定理 3.11 から特に, M がむきづけ可能でありかつ $\mathcal{W}_M$ を達成するはめこみが存在するならばそれはうめこみであることがわかる.

さらに Simon は [Si1], [Si2] において次の定理を示した:

定理 3.12 ([Si1]) M がコンパクトむきづけ可能かつ種数が 1 (つまりトーラス) であるならば, $\mathcal{W}_M$ を達成するうめこみ $\iota : M \to \mathbf{R}^3$ が存在する.

そして Schmidt は [Sc] において次の定理を示した:

定理 3.13 ([Sc]) M がトーラスであるならば, $\mathcal{W}_M$ を達成するうめこみ $\iota : M \to \mathbf{R}^3$ に対し $\mathbf{R}^3$ の共形変換 X が存在して $X \circ \iota(M) = T_{\sqrt{2},1}$ がなりたつ. 従って M の $\mathbf{R}^3$ へのはめこみ ι に対し $\mathcal{W}(\iota) \geqq 2\pi^2$ がなりたち, 等号成立は $\iota(M)$ が $\mathbf{R}^3$ の共形変換によって $T_{\sqrt{2},1}$ と写りあうときに限る.

定理 3.13 によって, Willmore 予想は肯定的に解決される.