ラグランジュ交叉理論のフレアーホモロジー

赤穂 まなぶ
東京都立大学大学院 理学研究科

1　序文

フレアーホモロジーと呼ばれるものにはいくつかの種類があり, 主なものとして

- シンプレクティック多様体のなかのラグランジュ部分多様体の交叉理論におけるフレアーホモロジー [1],
- シンプレクティック同相写像の不動点に関するフレアーホモロジー [2],
- ホモロジー 3 球面 (S^3 と同じホモロジー群を持つ 3 次元多様体) 上の $SU(2)$ ゲージ理論におけるフレアーホモロジー [3].

などが挙げられる. これらはそれぞれ異なる幾何学的対象を扱った理論であるが, その背景には無限次元多様体のモース理論という共通のアイデアが隠されている. 本稿ではラグランジュ交叉理論のフレアーホモロジーについて, 証明の細部にはこだわらず, 解説を行う.

2　モースホモロジー

この節では有限次元多様体のモースホモロジーについて解説する. 以下 M をコンパクトで境界を持たない n 次元可微分多様体, $f : M \to \mathbf{R}$ を M 上の滑らかな函数とする. f の臨界点 p, つまり $df_p = 0$ となる M の点 p において, 接ベクトル空間 T_pM 上の対称な 2 次形式

$$(Hf)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

を, 接ベクトル $u, v \in T_pM$ が p のまわりの座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ をもちいて

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad v = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

と表されているとき,

$$(Hf)_p(u,v) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) a_i b_j$$

と定義する. $(Hf)_p$ を臨界点 p におけるヘッセの 2 次形式と呼び, これが非退化なとき p を非退化な臨界点と呼ぶ. 更に行列

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

の負の固有値の数を f の p における指数と呼ぶ. M 上の滑らかな函数 f の臨界点がすべて非退化であるとき f をモース函数と呼ぶ. コンパクトな可微分多様体上には十分多くのモース函数が存在することが知られている.

M 上のリーマン計量 g を 1 つ固定する. 滑らかな函数 $f : M \to \mathbf{R}$ に対して, 任意の接ベクトル v について

$$g(v, \mathrm{grad} f) = v(f)$$

が成り立つような接ベクトル場 $\mathrm{grad} f$ が一意的に定まる. これを f の勾配ベクトル場と呼ぶ. モース函数 f について p, q を非退化な臨界点とし, その指数をそれぞれ $\mu(p), \mu(q)$ とする. ここでは $\mu(p) > \mu(q)$ とし, 次の集合を考える.

$$\mathcal{M}(p,q) := \{x : \mathbf{R} \to M | \dot{x} = -\mathrm{grad} f, \lim_{\tau \to -\infty} x = p, \lim_{\tau \to \infty} x = q\}.$$

実数 a と $x(\tau) \in \mathcal{M}(p,q)$ に対して $(a \cdot x)(\tau) := x(\tau + a)$ は再び $\mathcal{M}(p,q)$ の元になり, $\mathcal{M}(p,q)$ には $\mathbf{R}$ が作用していることがわかる. その商空間を $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ と書くことにする. すると次の定理が成り立つことが知られている.

定理 2.1 一般的なリーマン計量に対して, $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ は $\mu(p) - \mu(q) - 1$ 次元可微分多様体になる.

さらに次の定理が成り立つ.

定理 2.2 (1) $\mu(p) - \mu(q) = 1$ のとき $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ はコンパクト.
(2) $\mu(p) - \mu(q) = 2$ のとき $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ の適当なコンパクト化が存在し, その境界は

$$\bigcup_{\mu(r) = \mu(p) - 1} \hat{\mathcal{M}}(p,r) \times \hat{\mathcal{M}}(r,q)$$

となる.

また多様体 $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ 達には定理のコンパクト化と両立する向きを与えることが出来る.

これらを用いてモースホモロジーを構成する. まず C_k を指数が k の臨界点を生成元とする $\mathbf{Z}$ 上の自由加群とする.

$$C_k := \bigoplus_{\mu(p)=k} \mathbf{Z}p.$$

次に境界準同型 $\partial : C_k \to C_{k-1}$ を

$$\partial p := \sum_{\mu(q)=k-1} \sharp\hat{\mathcal{M}}(p,q)q$$

と定義する. ここで $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ は向き付けられたコンパクトな 0 次元多様体, つまりプラス・マイナスの符号を与えられた有限個の点であったことに注意し, $\sharp\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ はその符号の和とする. 定義より

$$\begin{aligned}\partial\partial x &= \partial \sum_{\mu(y)=\mu(x)-1} \sharp\hat{\mathcal{M}}(x,y)y \\ &= \sum_{\mu(y)=\mu(x)-1}\ \sum_{\mu(z)=\mu(y)-1} \sharp\hat{\mathcal{M}}(x,y)\sharp\hat{\mathcal{M}}(y,z)z\end{aligned}$$

であるが, これが 0 であるためには

$$\sum_{\mu(y)=\mu(x)-1} \sharp\hat{\mathcal{M}}(x,y)\sharp\hat{\mathcal{M}}(y,z) = 0$$

であればよい. ところが定理 2.2(2) より, これは 1 次元多様体 $\hat{\mathcal{M}}(x,z)$ の境界の位数であるから 0 である. したがって $\partial^2 = 0$ となる.

定理 2.3 $\partial^2 = 0$ が成り立ち, そのホモロジー群は M の特異ホモロジー群に同型である.

$\mathrm{Ker}\partial/\mathrm{Im}\partial$ をモースホモロジーと呼ぶ.

以下でごく簡単な例を用いて定理 2.2, 定理 2,3 の内容を確かめる, [4]. (ここでは向きの説明は省略する. 簡単のため $\mathbf{Z}_2$ 上で考えればよい.) M を図 1 のような多様体とし, モース函数として高さ函数をとってくる. 臨界点は p,q,r,s であり, 指数はそれぞれ $\mu(p)=2, \mu(q)=2, \mu(r)=1, \mu(s)=0$ となる. このとき $\hat{\mathcal{M}}(p,r)$, $\hat{\mathcal{M}}(q,r)$ はそれぞれ 1 点からなる集合で, $\hat{\mathcal{M}}(r,s)$ は 2 点からなる集合である.

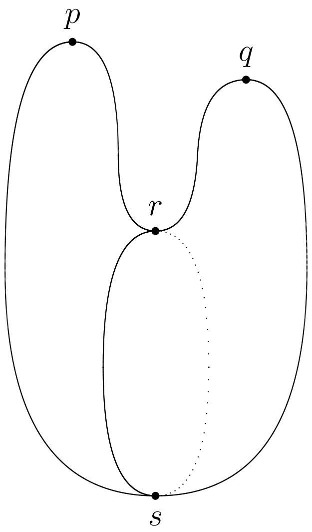

図 1

また例えば $\hat{\mathcal{M}}(p,s)$ は図 2 のような開区間と同一視することができ, そのコンパクト化の境界は $\hat{\mathcal{M}}(p,r) \times \hat{\mathcal{M}}(r,s)$ となる.

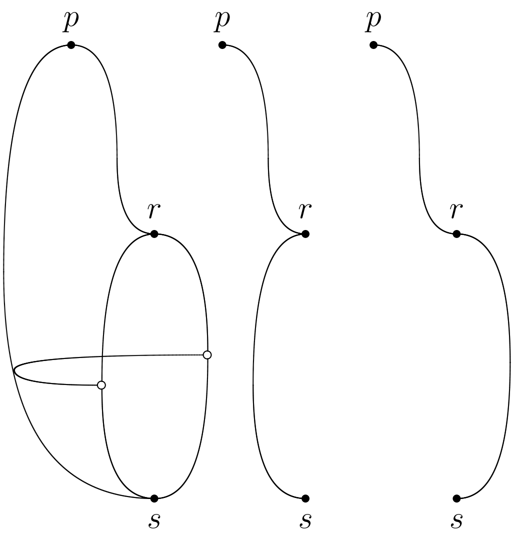

図 2

この例では

$$\partial p = r,\ \partial q = -r,\ \partial r = 0,\ \partial s = 0$$

となり, モースホモロジーは

$$\mathbf{Z}[p+q] \oplus \mathbf{Z}[s]$$

で M の特異ホモロジー群と同型になることがわかる.

3　シンプレクティック多様体

可微分多様体 M 上に非退化な閉 2 次形式 ω が存在するとき, M をシンプテクティック多様体, ω をシンプレクティック形式と呼ぶ. つまり ω は

- $d\omega = 0$,
- M の各点 p において, 任意の $v \in T_pM$ に対して $\omega(v, u) = 0$ ならば $u = 0$

を満たすような 2 次形式である. またこのとき M は偶数次元の多様体であることがわかる. シンプレクティック多様体の例として次のようなものが挙げられる.

- 偶数次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{2n}$ と閉 2 次形式 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$.
- ケーラー多様体とそのケーラー形式.
- X を多様体とし U を座標近傍, $(x_1, \ldots, x_n)$ を局所座標とする. X の余接束 T^*X において $T^*X|_U$ と $U \times \mathbf{R}^n$ を $\sum_{i=1}^n y_i dx_i \simeq (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ により同一視したとき, 各 $T^*X|_U$ 上の 2 次形式 $\omega|_U := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ は T^*X 上のシンプレクティック形式 ω を定める.

シンプレクティック多様体 (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) の間の微分同型写像 $f : M_1 \to M_2$ が

$$f^*\omega_2 = \omega_1$$

を満たすとき, f をシンプレクティック同型写像と呼ぶ. ここで $[0,1]$ 区間の座標を t で表し, $H_t : M \times [0,1] \to \mathbf{R}$ をシンプレクティック多様体 M 上の滑らかな函数とする. シンプレクティック形式 ω が非退化であることから, この H_t に対して

$$\omega(\cdot, X_t) = dH_t$$

を満たすようなベクトル場 X_t が一意的に存在する. このとき H_t をハミルトニアン函数, X_t をハミルトニアンベクトル場と呼ぶ. またこの X_t に対して, 微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t &= X_t \circ \phi_t, \\ \phi_0 &= \mathrm{id}, \end{cases}$$

を満たすようなイソトピー $\phi_t : M \times [0,1] \to M$ をハミルトニアンイソトピーと呼ぶ. $\phi_t : M \to M$ はシンプレクティック同型写像であることがわかる.

M の次元を $2n$ としたとき, M の中の n 次元部分多様体 L について

$$\omega|_{TL} = 0$$

が成り立っているとき, L をラグランジュ部分多様体と呼ぶ. ラグランジュ部分多様体の例として次のようなものが挙げられる.

- $\mathbf{R}^2$ の中の 1 次元部分多様体.
- 可微分多様体 X の余接束 T^*X とその射影 $\pi : T^*X \to X$ に対して, $\pi^{-1}(p), p \in X$, は T^*X の標準的なシンプレクティック形式についてラグランジュ部分多様体となる. また T^*X のゼロ切断 0_L もラグランジュ部分多様体となる.
- $\{\phi_t\}_{0 \le t \le 1}$ をハミルトンイソトピー, L をラグランジュ部分多様体とすると, $\phi_t(L)$ もまたラグランジュ部分多様体となる.

ここで次の定理を挙げておく.

定理 3.1 ラグランジュ部分多様体 L の十分小さい管状近傍 $N(L)$ と $\omega|_{N(L)}$ の組は T^*L のゼロ切断 0_L のある管状近傍 $N(0_L)$ と T^*L の標準的なシンプレクティック形式 ω_{tan} を $N(0_L)$ に制限した $\omega_{tan}|_{N(0_L)}$ の組とシンプレクティック同型である:

$$(N(L), \omega) \simeq (N(0_L), \omega_{tan}|_{N(0_L)}).$$

4 ラグランジュ交叉理論のフレアーホモロジー

可微分多様体 X 上の滑らかな函数 $f : X \to \mathbf{R}$ と余接束 $\pi : T^*X \to X$ に対して T^*X 上の函数 $H := f \circ \pi : T^*X \to \mathbf{R}$ を考える. H を (t によらない) ハミルトニアン函数とし, $\phi_t : T^*X \times [0,1] \to T^*X$ をそのハミルトニアンイソトピーとする. T^*X のゼロ切断 0_X について, $\phi_1(0_L)$ は 1 形式 df のグラフ $\{(x, df_x) \in T^*X\}$ であることがわかる. 従って 0_X と $\phi_1(0_X)$ の交点は $df_p = 0$ となる X の点に対応する. さらに f がモース函数ならば 0_X と $\phi_1(0_X)$ は横断的に交わることがわかる. よって

定理 4.1 X はコンパクトで境界を持たないとする. また f をモース函数とする. そのとき

$$\sharp\{0_X \cap \phi_1(0_X)\} \ge \mathrm{rank} H_*(X)$$

が成り立つ.

0_X を摂動させたものを $0'_X$ と書き, これが 0_X と横断的に交わるとき一般にその交点の数は下から X のオイラー数 $\chi(X)$ で評価することしかできない:

$$\sharp\{0_X \cap 0'_X\} \ge \chi(X).$$

定理 4.1 はラグランジュ部分多様体とハミルトニアンイソトピーの持つ性質を端的に表したものと言える. そしてフレアーはフレアーホモロジーを用いることにより, 定理 4.1 の拡張である次のアーノルド予想を証明した.

定理 4.2 M をコンパクトで境界を持たないシンプレクティック多様体, L をラグランジュ部分多様体とする. 任意の写像 $u:(D^2,\partial D^2)\to(M,L)$ に対して,

$$\int_{D^2} u^*\omega = 0$$

であると仮定する. さらにハミルトニアンイソトピー $\phi_t : M\times[0,1]\to M$ について, L と $\phi_1(L)$ が横断的に交わるとする. そのとき

$$\sharp\{L\cap\phi_1(L)\}\geq \mathrm{rank} H_*(L,\mathbf{Z}_2)$$

が成り立つ.

この場合も L を摂動させた L' と L が横断的に交わるとき, 定理3.1 に注意すると, 一般にその交点の数は下から L のオイラー数 $\chi(L)$ で評価することしかできない:

$$\sharp\{L\cap L'\}\geq\chi(L).$$

以下では無限次元多様体でのモースホモロジーとしての, フレアーホモロジーを説明していく. M をコンパクトで境界を持たないシンプレクティック多様体, ω をそのシンプレクティック形式, L をラグランジュ部分多様体とする. そして $\phi_t : M\times[0,1]\to M$ を $H_t : M\times[0,1]\to\mathbf{R}$ をハミルトン函数にもつハミルトニアンイソトピーとする. まず $x_0\in L$ を固定し

$$\Omega := \{l:[0,1]\to M | l(0)\in L, l(1)\in\phi_1(L), l \text{ と } \phi_t(x_0) \text{ はホモトピック }\}$$

と定義する. そして $\tilde{\Omega}$ を Ω の普遍被覆空間とする:

$$\tilde{\Omega} := \{u:[0,1]\times[0,1]\to M | u(\tau,0)\in L, u(\tau,1)\in\phi_1(L), u(0,t)=\phi_t(x_0)\}/\text{ホモとピー}.$$

$\tilde{\Omega}$ 上の函数 $F:\tilde{\Omega}\to\mathbf{R}$ を次のように定義する.

$$F(u) := \int_0^1 d\tau\int_0^1 dt\omega(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial\tau}).$$

すると次の命題を示すことができる.

命題 4.3 任意の写像 $v:(D^2,\partial D^2)\to(M,L)$ に対して

$$\int_{D^2} v^*\omega = 0$$

ならば, $u_0,u_1\in\tilde{\Omega}$ について $u_0(1,t)=u_1(1,t)$ のとき

$$F(u_0)=F(u_1).$$

従って命題4.3の仮定の下では F は Ω 上の函数だとみなせる．以下命題4.3の条件を仮定する．このとき Ω と F が我々の無限次元多様体とその上のモース函数である．$l \in \Omega$ における接空間は

$$T_l\Omega = \{\xi(t) \in l^*TM | \xi(0) \in T_{l(0)}L, \xi(1) \in T_{l(1)}\phi_1(L)\}$$

となる．本当は無限次元多様体と言うときには写像の空間を適当なソボレフノルムを用いて完備化する必要があるのだが, 本稿ではそのような手続きはいっさい省略する．次にこの F の勾配ベクトル場を求める．まず次のことに注意する．

命題 4.4 *M 上のリーマン計量 g と概複素構造 J, つまり $J^2 = -1$ となる $J \in \mathrm{End}(TM)$, で次の条件を満たすものが必ず存在する．*

- $g(u,v) = \omega(u, Jv)$,
- $g(u,v) = g(Ju, Jv)$.

より一般に上の条件を満たしながらパラメーター $t \in [0,1]$ に依存する g_t と J_t を考える．Ω 上の計量を

$$(\xi_1, \xi_2) := \int_0^1 g_t(\xi_1(t), \xi_2(t))dt, \quad \xi_1, \xi_2 \in T_l\Omega,$$

と定義する．すると F の定義より

$$\begin{aligned}(dF)_l(\xi) &= \int_0^1 \omega\left(\frac{dl}{dt}, \xi\right)dt \\ &= \int_0^1 \omega\left(\frac{dl}{dt}, J_t(-J_t\xi)\right)dt \\ &= \left(\frac{dl}{dt}, -J_t\xi\right) \\ &= \left(J_t\frac{dl}{dt}, \xi\right),\end{aligned}$$

従って $(dF)_l = 0$ であるための必要十分条件は

$$\frac{dl}{dt} = 0$$

となる．これは l が $L \cap \phi_1(L)$ への定値写像であることを表している．また F の勾配ベクトル場は

$$\mathrm{grad}F = J_t\frac{dl}{dt}$$

となる. (厳密には境界条件から $J_t \frac{dl}{dt}$ は $T_l\Omega$ の元ではない.) そこで有限次元のときの類似で $p,q \in L \cap \phi_1(L)$ に対して次の集合を考える.

$$\mathcal{M}(p,q) := \left\{ u : \mathbf{R} \times [0,1] \to \Omega \;\middle|\; \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\mathrm{grad}F,\ \lim_{\tau \to -\infty} u = p,\ \lim_{\tau \to \infty} u = q \right\}.$$

実数 a と $u(\tau,t) \in \mathcal{M}(p,q)$ に対して $(a \cdot u)(\tau,t) := u(\tau + a, t)$ は再び $\mathcal{M}(p,q)$ の元になり, $\mathcal{M}(p,q)$ には $\mathbf{R}$ が作用していることがわかる. その商空間を $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ と書くことにする. 方程式 $\partial u/\partial \tau = -\mathrm{grad}F$ を書き下すと

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + J_t(u(\tau,t))\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

となる. これは非線型楕円型偏微分方程式であり, 次の定理が成り立つことが知られている. これは定理 2.1 の類似である.

定理 4.5 L と $\phi_1(L)$ は横断的に交わっているとする. $L \cap \phi_1(L)$ の各元 p に対してある整数 $\mu(p)$ を対応させることができ, 一般的なパラメーター t に依存する概複素構造 J_t に対して, $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ は $\mu(p) - \mu(q) - 1$ 次元可微分多様体になる.

定理 4.5 の L と $\phi_1(L)$ が横断的に交わるという仮定はモース函数の臨界点の非退化性に対応している. さらにに定理 2.2 の類似も成り立つ.

定理 4.6 命題 *4.3* の仮定のもと次が成り立つ.
(1) $\mu(p) - \mu(q) = 1$ のとき $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ はコンパクト.
(2) $\mu(p) - \mu(q) = 2$ のとき $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ の適当なコンパクト化が存在し, その境界は

$$\bigcup_{\mu(r)=\mu(p)-1} \hat{\mathcal{M}}(p,r) \times \hat{\mathcal{M}}(r,q)$$

となる.

すると有限次元のモースホモロジーのときのように, これらを用いてホモロジー群を構成することができる. ここでは話を $\mathbf{Z}_2$ 上で考える. まず C_k を $\mu(p) = k$ となる $L \cap \phi_1(L)$ の点を生成元とする $\mathbf{Z}_2$ 上のベクトル空間とする.

$$C_k := \bigoplus_{\mu(p)=k} \mathbf{Z}_2 p.$$

次に境界準同型 $\partial : C_k \to C_{k-1}$ を

$$\partial p := \sum_{\mu(q)=k-1} \sharp \hat{\mathcal{M}}(p,q) q$$

と定義する. ここで $\hat{\mathcal{M}}(p,q)$ はコンパクトな 0 次元多様体であったことに注意する. すると次の定理が成り立つ.

定理 4.7 $\partial^2 = 0$ が成り立つ.

$\mathrm{Ker}\partial/\mathrm{Im}\partial$ をラグランジュ交叉理論におけるフレアーホモロジーと呼ぶ. これらの定義には概複素構造 J_t とハミルトニアン函数 H_t を用いていたが, 次のことが成り立つ.

定理 4.8 一般的な J_t と H_t に対して, フレアーホモロジーはこれらに依らずに同型になる.

実際にフレアーホモロジーを計算するためには定理 4.8 がカギとなる. ハミルトニアン函数 H_t を十分小さく取り, $\phi_1(L)$ が定理 3.1 の $N(L)$ に含まれるようにする. さらに $\phi_1(L)$ を $N(0_L)$ の中で見たときに 4 節の始めで説明したように L 上のモース函数 h に対する dh のグラフと同一視できるように H_t を選ぶ. このとき $f := -h$ も L 上のモース函数であることに注意する. 以下では M のリーマン計量を $N(L)$ に制限したものは L のリーマン計量 g から誘導されたものとし, 概複素構造 J を $N(L)$ に制限したものは g のレビ・チビタ接続を用いて垂直方向を水平方向へ写すものとする.

補題 4.9 $x : \mathbf{R} \to L$ が

$$\frac{dx}{d\tau} = -\mathrm{grad} f$$

を満たしているとする. そのとき $\overline{x}(\tau, t) := \phi_t(x(\tau))$ とすると

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau} + J_t(\overline{x}(\tau, t)) \frac{\partial \overline{x}}{\partial t} = 0$$

が成り立つ. ただし $J_t := \phi_{t*} J (\phi_{t*})^{-1}$ とする.

この対応によりモースホモロジーの ∂ を定義する際に使った $\mathcal{M}(p, q)$ の元とフレアーホモロジーの ∂ を定義する際に使った $\mathcal{M}(p, q)$ の元が一対一に対応することが示せる. また L と $\phi_1(L)$ の交点と f の臨界点は一対一に対応するので, 従ってモースホモロジーとフレアーホモロジーは同型になる.

定理 4.10 フレアーホモロジーは L の $\mathbf{Z}_2$ 係数特異ホモロジー群に同型である.

よってこれらをまとめると

$$\begin{aligned}
&\sharp\{L \cap \phi_1(L)\} \\
&\quad = \ L \text{ と } \phi_1(L) \text{ のフレアー鎖複体の生成元の数} \\
&\quad \geq \ L \text{ と } \phi_1(L) \text{ のフレアーホモロジーの階数} \\
&\quad = \ L \text{ と } \phi_1(L) \text{ の } \mathbf{Z}_2 \text{ 上のモースホモロジーの階数} \\
&\quad = \ L \text{ と } \phi_1(L) \text{ の } \mathbf{Z}_2 \text{ 上の特異ホモロジーの階数}
\end{aligned}$$

となり, 定理 4.2 が証明される.

参考文献

[1] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections,* J. Diff. Geom. 28, No. 3, 513–547, (1988).

[2] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres,* Comm. Math. Phys. 120, 575–611, (1989).

[3] A. Floer, *An instanton invariant for three manifolds,* Comm. Math. Phys. 118, 215–240, (1989).

[4] 深谷 賢治, ゲージ理論とトポロジー, シュプリンガー・フェアラーク東京, (1995).

[5] 深谷 賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波講座 現代数学の展開, (1999).