# Conformally flat structure (共形平坦構造) と その仲間たち

神島 芳宣

平成 15 年 12 月 12 日

ここでは, 多様体上の conformally flat structure を定義して, いろいろな結果, また, この構造と同じような構成で得られる仲間を紹介する.

**1. Klein の射影モデル** $n+2$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+2}$ と射影空間 $\mathbb{R}P^{n+1}$ を考える.

$$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \xrightarrow{P} \mathbb{R}P^{n+1}. \tag{0.1}$$

$\mathbb{R}^{n+2}$ 上の非退化 2 次形式 (ローレンツ内積) を

$$b(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n+2}y_{n+2}$$

とおく. $n+2$ 次正則行列群 $GL(n+2,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n+2}$ の元を縦ベクトルとみて, 左からの行列の積として作用する. $\mathbb{R}^{n+2}$ の部分集合を

$$\begin{aligned} V_-^{n+2} &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \mid b(x,x) < 0\}, \\ V_{-1}^{n+1} &= \{x \in \mathbb{R}^{n+2} - \{0\} \mid b(x,x) = -1\} \end{aligned}$$

とおく. $V_{-1}^{n+1}$ は実 hyperboloid とよばれ、２個の連結集合からなる. (図 1 参照.)

2 次形式 $b$ を不変にする部分群を考える.

$$O(n+1,1) = \{A \in GL(n+2,\mathbb{R}) \mid b(Ax,Ay) = b(x,y)\ \forall x,y \in \mathbb{R}^{n+2}\}.$$

$O(n+1,1)$ は実ローレンツ群といわれ, 4 つの連結成分をもつ Lie 群である. $I$ を単位行列とするとき, $O(n+1,1)$ は中心 $\mathbb{Z}_2 = \{\pm I\}$ をもつので, これでわることにより商群 $PO(n+1,1) = O(n+1,1)/\mathbb{Z}_2$ がえられる. 連結成分を $PO(n+1,1)^0$ は正規部分群をもたない Lie 群である (階数 1 の単純 Lie 群という). さらに, 共通部分 $\mathbb{R}^* \cap O(n+1,1) = \mathbb{Z}_2$ となることから, $PO(n+1,1)$ は $\mathbb{R}P^{n+1}$ の中の像 $P(V_-)$ に効果的 (effective) に作用する.

**定義 1 (Klein の双曲空間の射影モデル).** $P(V_-) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$.

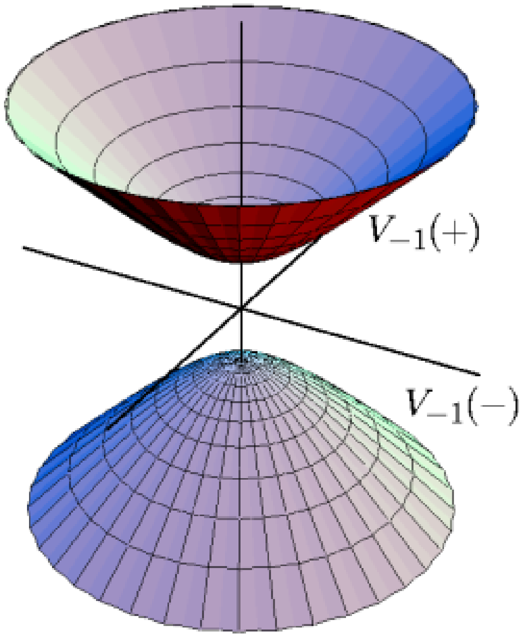


図 1:

このようにして射影モデルとしての双曲幾何学 $(PO(n+1,1), \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1})$ が得られる.

**注 1)** $V_-$ は $\mathbb{R}^{n+2} - \{0\}$ の開集合で $P$ は軌道空間 $\mathbb{R}^{n+2} - \{0\}/\mathbb{R}^* = \mathbb{R}P^{n+1}$ の射影、したがって開写像なので $P(V_-) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ は $\mathbb{R}P^{n+1}$ の開集合である. 例えば、射影平面 $\mathbb{R}P^2$ から $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ を除くと、メービウスの帯が出てくる.

**注 2)** (0.1) の射影 $P$ の制限

$$\mathbb{Z}_2 \to V_{-1} \xrightarrow{P} \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}. \tag{0.2}$$

は被覆空間を与える. ここに $P(V_{-1}) = P(V_-) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ に注意. この構成において, (0.2) と hyperboloid $V_{-1}$ を使って $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ は定負曲率をもつリーマン計量 (双曲計量) $g$ をもち またそれに関する等長変換群 $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}, g)$ が $PO(n+1,1)$ になることが証明できる. (この場合のリーマン計量は Poincaré モデルからくる双曲計量でないことに注意.)

$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ のコンパクト化を考える. 同変な図式

$$(O(n+1,1), V_-) \xrightarrow{P} (PO(n+1,1), \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}) \subset (PGL(n+2,\mathbb{R}), \mathbb{R}P^{n+1})$$

に戻って, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ の $\mathbb{R}P^{n+1}$ における閉包をとる; $\bar{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^{n+1} \subset \mathbb{R}P^{n+1}$. $\bar{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ は位相的に $n+1$ 次元閉球であり, 境界 $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1} = \bar{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^{n+1} - \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ は $n$ 次元球面 $S^n$ に同相である. (図 2 参照.) 実際, 斉次座標を使って,

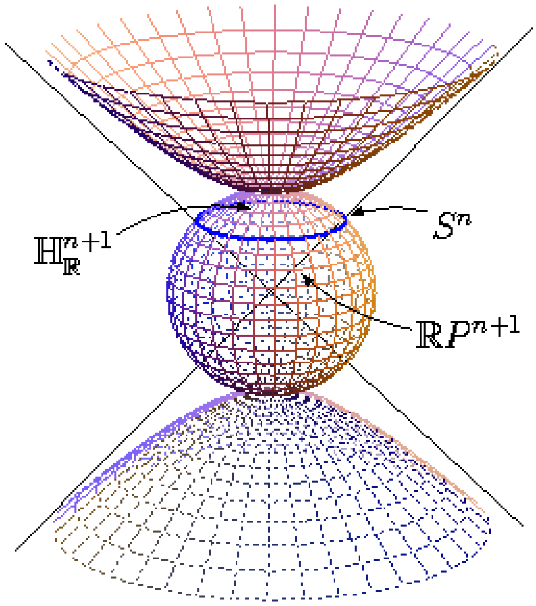


図 2:

$$\begin{aligned} &[x_1, \cdots, x_{n+2}] \in \bar{\mathbb{H}}^{n+1}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^{n+1} \\ &\partial \mathbb{H}^{n+1}_{\mathbb{R}} = \{[x_1, \cdots, x_{n+2}] \in \mathbb{R}P^{n+1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = 0\} \end{aligned} \tag{0.3}$$

となるから, $\partial \mathbb{H}^{n+1}_{\mathbb{R}} = S^n$ を $[x_1, \cdots, x_{n+2}] \mapsto (x_2 x_1^{-1}, \cdots, x_{n+2} x_1^{-1})$ により同一視できる. $PO(n+1,1)$ の作用は閉包 $\bar{\mathbb{H}}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ に自然に拡張する. 特に $PO(n+1,1)$ の作用は $S^n$ を保つ. さらに $PO(n+1,1)$ は $S^n$ に推移的に作用することがわかるので, 幾何学 $(PO(n+1,1), S^n)$ が得られる. $PO(n+1,1)$ の作用は球面上では共形変換とよばれる. 具体的に座標を使って書けるのだが, 簡単にいうと, $S^n$ の 1 点 (北極) をとり, それを $\{\infty\}$ とかく. $PO(n+1,1)_\infty = \{h \in PO(n+1,1) \mid h \cdot \infty = \infty\}$ は $\infty$ における固定化群である. $PO(n+1,1)/PO(n+1,1)_\infty = PO(n+1,1) \cdot \infty = S^n$ となり $S^n$ は等質空間である. しかし, リーマン等質空間と異なるところは, $PO(n+1,1)_\infty$ がノンコンパクトであることである. $S^n - \{\infty\}$ を立体射影 (これは共形変換) により $\mathbb{R}^n$ に写すとき, $PO(n+1,1)_\infty$ の各元は $\mathbb{R}^n$ の平行移動, 原点のまわりの回転, 原点を固定する相似 (伸縮) からなる変換の合成したものである. したがって, $PO(n+1,1)_\infty$ は $\mathbb{R}^n$ と $O(n) \times \mathbb{R}^+$ の半直積群からなるリー群である.

$$PO(n+1,1)_\infty = \mathbb{R}^n \rtimes (O(n) \times \mathbb{R}^+).$$

$\mathrm{Conf}(S^n)$ をリー群としては $PO(n+1,1)$ であって, その作用を共形変換とするこ

とにすれば, 共形平坦幾何学 $(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ が得られたことになる.

**2. 現代的定義** $n$ 次元多様体 $M$ の共形平坦構造 (conformally flat structure) とは, 局所的に $(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ にモデルされる $M$ の座標近傍系のことである. そのような座標近傍系 (charts) をもつとき, $M$ を conformally flat manifold (共形平坦多様体) という, 正確にいうと, $M$ の極大座標近傍系 (maximal collection of charts) $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ が次の条件をみたすとき, $M$ 上の一つの共形平坦構造という.

(1) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は $M$ の開被覆, 各 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset S^n$ は同相写像.

(2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき, 座標変換 ($S^n$ の局所変換であるが) $g_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $\mathrm{Conf}(S^n)$ の変換 $h$ に一意的に拡張する; $h|\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = g_{\beta\alpha}$.

$M$ 上に (1), (2) をみたす極大座標近傍系が二つあるとき, 多様体の微分構造と同様に, それぞれの開被覆 $\{U_\alpha\}, \{U'_\alpha\}$ に対し, それぞれから得られる共通の細分 (refinement) が存在して, 座標関数 $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ の制限が $\mathrm{Conf}(S^n)$ の元を除いて一致するとき, 同値であるという ($V_\alpha = U_\alpha \cap U'_\alpha$ のとき, $\varphi'_\alpha|V_\alpha = h_\alpha \cdot \varphi_\alpha|V_\alpha$ となる $h_\alpha \in \mathrm{Conf}(S^n)$ があるということ). その同値類の集合を $M$ の 共形平坦構造に関する uniformization (一意化) という. $M$ の一つの uniformization を改めて $M$ の conformally flat structure という. $M$ が conformally flat structure をもつとき, $M$ は $(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ に local に uniformize されるとか, $(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ に local に model される等という. この構造をもつ多様体 $M$ のことを conformally flat manifold(共形平坦多様体) という.

$(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ に関して, $S^n$ の domain (open subset) $X$ と $\mathrm{Conf}(S^n)$ の部分群で $X$ を保つものを $\mathrm{Conf}(X)$ とかけば, $X$ は $S^n$ の共形平坦構造 (それ自身 $S^n$ と id を座標近傍系とする) の $X$ への制限 (座標近傍系 $X$ と id) として, 共形平坦多様体である.

**例 1 (Similarity Geometry)** $X = S^n - \{\infty\}$ は共形的にベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ であった. 共形平坦幾何学 $(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ の部分幾何学として, $(\mathrm{Conf}(X), X) = (\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ が得られる, これを相似幾何学という. 前に述べたように, $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^n) = PO(n+1,1)_\infty = \mathbb{R}^n \rtimes (O(n) \times \mathbb{R}^+)$ である. この部分幾何として, ユークリッド幾何 $(E(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ がある. $E(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ はユークリッド等長変換群.

**例 2 (Real Hyperbolic Geometry)** $S^{n-1}$ を $S^n$ の赤道として、$S^n - S^{n-1} = S^n_+ \cup S^n_-$ とおく. (0.3) の斉次座標を用いて, $S^n_+$ は $[1, 0, \cdots, 1]$ を含む成分 (上半球面) を, $S^n_-$ は $[-1, 0, \cdots, 1]$ を含む成分 (下半球面) をとする. 一方, 実 hyperboloid$V^n_{-1}$ を２個の連結集合 $(1, 0, \cdots, 0)$ を含む成分 $V^n_{-1}(+)$ と $(-1, 0, \cdots, 0)$ を含む成分 $V^n_{-1}(-)$ にわけて, $V^n_{-1} = V^n_{-1}(+) \cup V^n_{-1}(-)$ とすると, $n$ 次元の場合の (0.2) において容易にわかるように $\mathbb{Z}_2$ は $V^n_{-1}(\pm)$ を interchange する. さらに, $P : V^n_{-1}(+) \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ は同型で

ある.

$$\nu([x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}]) = (x_1 x_{n+2}^{-1}, \cdots, x_{n+1} x_{n+2}^{-1})$$

と定義すれば, $-(x_1 x_{n+2}^{-1})^2 + (x_2 x_{n+2}^{-1})^2 + \cdots + (x_{n+1} x_{n+2}^{-1})^2$ から $\nu : S_+^n \to V_{-1}^n(+)$ の上への同型を与える.

$$P \circ \nu : S_+^n \to \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \text{ は同型.}$$

したがって

$$S^n - S^{n-1} = S_+^n \cup S_-^n = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \times \{\pm 1\}.$$

$PO(n+1,1)$ の部分群で補集合 $S^n - S^{n-1}$ を保つ群は $P(O(n,1) \times \mathbb{Z}_2) = O(n,1)$ であり, さらに $S_+^n$ を保つものは $PO(n,1)$ である. 故に $X = S_+^n$ とるとき, 双曲幾何学 $(\mathrm{Conf}(X), X) = (PO(n,1), \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$ が得られる.

**注３)** 点 $(1, 0, \cdots, 0)$ を含む成分 $V_{-1}^n(+)$ を保つ $O(n,1)$ の部分群を $SO(n,1)$ とかく場合がある. $PO(n,1) = SO(n,1)$ である $PO(n,1)$ は２個の成分からなる直交ローレンツ群という.

2 次元リーマン多様体 $M$ は Gauss の定理より isothermal coordinate がある. (つまり, $M$ の近傍ではリーマン計量は (局所) 共形的ユークリッド計量である) したがって, 二つの近傍の共通部分での座標変換は共形変換である (等角変換でもある) が, 必ずしも $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の共形変換 ($= \mathrm{Conf}(S^2)$) に拡張するわけではない – 前の条件 (2) をみたしているわけではない. しかし, 2 次元リーマン多様体は 1 次元複素多様体とみなすとき, リーマン写像定理に基づく Koebe の定理によれば, 単連結リーマン曲面は等角 (したがって, 共形的に) に共形平坦多様体としてのリーマン球面 $S^2$, ガウス平面 $\mathbb{R}^2$ か上半平面 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ のいずれかに写される. 今, 2 次元多様体 (第 2 可算公理をみたすハウスドルフ空間) に計量を与えて, $M$ を 2 次元リーマン多様体とすると, 普遍被覆空間 $\tilde{M}$ は上のいずれかに共形的同相である. 一方, 基本群 $\pi_1(M)$ は $\tilde{M}$ に (その計量に関して) 等長変換として作用しているから, 特に, 共形変換でもある. $\Gamma$ をモデル空間に共形変換として作用している $\pi_1(M)$ と同型な群とする (上の共形同相を与える写像を $f$ とすると, 共役 $\Gamma = f\pi_1(M)f^{-1}$). よって, $M$ は $S^2/\Gamma, \mathbb{R}^2/\Gamma, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ と共形的に同型である. $\Gamma$ は 自由かつ固有不連続に作用するから, $S^2$ の場合, $\Gamma$ は有限群である. $\mathrm{Conf}(S^2)$ の極大コンパクト群は $O(3)$ なので共役を除いて, $\Gamma \subset O(3)$ とできる. つまり, $S^2/\Gamma$ は $(O(3), S^2)$ に一意化される. $\Gamma$ が $\mathbb{R}^2$ に自由かつ固有不連続に作用している場合, $\Gamma \subset \mathrm{Conf}(S^2)_\infty = \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$ である. **一般論**: *Sim*$(\mathbb{R}^2)$ **の元** $r$ **は** $r = (a, \lambda \cdot A) \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, A \in O(2), a \in \mathbb{R}^2$ **の形をしており**, $\mathbb{R}^2$ **にアフィン変換** $rv = \lambda \cdot Av + a$ **として作用している**.

$L : \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^+$ を $L(r) = \lambda$ をみたす scale homomorphism とする. $\Gamma \subset \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$ において, 今, $\Gamma$ の元 $r$ が, $L(r) = \lambda \neq 1$ としてみる. $v$ を未知数として式

$$\lambda \cdot Av + a = v$$

として解くと, $(\lambda A - I)v = -a$ で, $\lambda \cdot A$ は 行列 $A \in O(2)$ から, 固有値 1 を決してもたない. よって逆行列が存在して, 解 $v_o = -(\lambda A - I)^{-1}a$ がある. こ

のとき, $rv_o = v_o$ を満たすから, $r$ は不動点をもってしまう. 一方 $r$ は自由に $\mathbb{R}^2$ に作用しているから, $r = 1$ したがって $L(r) = 1$ これは矛盾である. よって, $L(\Gamma) = \{1\}$ つまり, $\Gamma \subset E(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ (= ユークリッド等長群) となってしまう. 故に $\mathbb{R}^2/\Gamma$ はリーマン平坦多様体 (ユークリッド空間形) である. コンパクトなら $T^2$ か Klein bottle $T^2/\mathbb{Z}_2$ のいずれかである. 次に, $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}/\Gamma$ の共形変換の群 $\Gamma$ は $\Gamma \subset \mathrm{Conf}(S^2 - S^1) = O(2,1)$ に入るが, $(1,0,\cdots,0)$ を保つから, $\Gamma \subset PO(2,1)$ である. つまり, 先に述べたように, $\Gamma$ は $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ の等長変換群 $PO(2,1)$ の部分群である. 結論として,

**定理 2.** 2 次元多様体はそれぞれ共形平坦幾何 $(O(3), S^2)$, $(E(2), \mathbb{R}^2)$, $(PO(2,1), \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ のいずれかに uniformize される.

**注4)** 2次元similarity geometry $(\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ において, $\mathbb{R} - \{0\}$ を考える. $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}^2)$ の部分群で原点 $\{0\}$ を固定するものは
$O(2) \times \mathbb{R}^+$ である. 例えば, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ をとり $\lambda$ により生成される無限巡回群 $\mathbb{Z}^+$ とする.

$$\lambda^n(x_1, x_2) = (\lambda^n x_1, \lambda^n x_2)$$

から $\mathbb{Z}^+$ は $\mathbb{R} - \{0\}$ 上**固有不連続**かつ自由に作用する. よって, 共形平坦多様体としての 2 次元コンパクト similarity 多様体 $\mathbb{R}^2 - \{0\}/\mathbb{Z}^+$ を得る. これは位相的に 2 次元トーラス (Hopf torus という) であるが、上の例で与えたはユークリッド平坦トーラスの共形平坦構造と異なることに注意する. 後の章で細分による同値よりも, 展開写像 (Development) を使って、多様体上に与えられた二つの共形平坦構造が同型であることの定義をするが、その時はっきりするが、簡単になぜかいうと, 基礎空間 $T^2$ の普遍被覆空間 $\mathbb{R}^2$ から $S^2$ への展開写像の像が前者は $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ であり, 後者は $\mathbb{R}^2$ であることから明らかに異なるわけである.

**問題 3.** 2 次元トーラス $T^2$ 上の共形平坦構造を分類せよ（共形平坦構造の変形空間を求めよということ.*)*

**3. 古典的定義** 定理 2 から, 自然に 3 次元以上の (コンパクト) 多様体は conformally flat structure をもつか, またどれ位異なるものがあるか (変形) が問題になってくる. 上の定理は直接リーマン計量は出てきていないが, 古典的にリーマン多様体からの共形平坦構造の定義を思い起こそう. $M$ 上のリーマン計量 $g, g'$ に対し, 関数 $\lambda > 0$ が存在し, $g' = \lambda \cdot g$ となるとき, $g$ と $g'$ は共形として, この同値類 $[g]$ を $g$ の共形構造といい, $(M, [g])$ を共形多様体という. さらに, $g$ が (局所) 共形的に, ユークリッド計量 $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ となるとき, $(M, [g])$ を共形平坦多様体という. このとき, この古典的定義は先に述べた conformal flat structure と一致することをいわなければいけない.

**定理 4.** $(M,[g])$ を $n(\geq 3)$ 次元共形平坦多様体とすると, $M$ は $(\mathrm{Conf}(S^n), S^n)$ に uniformize される (つまり (1), (2) をみたす座標近傍系が存在する). 逆に, $M$ 上に conformally flat structure $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ が与えられたとき, $M$ は共形平坦となるリーマン計量 $g$ をもつ. $(M,[g])$ は共形平坦多様体である.

**証)** $M$ の各点の近傍 $U$ に対し, 座標関数 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ をとるとき, 定義より, $g|U = \lambda\cdot\varphi^*(dx_1^2+\cdots+dx_n^2)$, $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$ はある関数. $U\cap V \neq \emptyset$ となる近傍 $V$ が存在して, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ を座標関数で, $g|V = \mu\cdot\psi^*(dx_1^2+\cdots+dx_n^2)$ をみたすとする. $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量 $\bar{g}_o = ds^2 = dx_1^2+\cdots+dx_n^2$ とかくとき, $\mathbb{R}^n$ の局所変換 $\psi\cdot\varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ は $(\psi\cdot\varphi^{-1})^*\bar{g}_o = v\cdot\bar{g}_o$ (ここで $v = \mu^{-1}(\varphi^{-1})\cdot\lambda(\varphi^{-1})$ である) となるから, $\mathbb{R}^n\subset S^n$ とみて, $\psi\cdot\varphi^{-1}$ は $S^n$ の局所共形変換である (geodesic の間の角度を保つ). $n\geq 3$ ならば, Liouville の定理より, 局所共形変換は $S^n$ の共形変換に拡張される. つまり, $h\in\mathrm{Conf}(S^n)$ が存在して, $\psi\cdot\varphi^{-1} = h|\varphi(U\cap V)$ である. よって, $M$ の各点のまわりで座標近傍と局所共形平坦を与える写像をとるとき, charts $\{U,\varphi\}$ は条件 (1), (2) をみたすから, 一つの conformally flat structure を与える.

逆に, $M$ に一つの conformally flat structure $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ が与えられたとする. 元 $g_{\beta\alpha}, g_{\gamma\beta}, g_{\gamma\alpha}\in\mathrm{Conf}(S^n)$ が 存在して, 共通部分 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\emptyset$ 上で次の図式を満たす.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \overset{\varphi_\alpha}{\nearrow} & S^n \\
U_\alpha\cap U_\beta & \circlearrowleft & \downarrow g_{\beta\alpha} \\
 & \underset{\varphi_\beta}{\searrow} & S^n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \overset{\varphi_\beta}{\nearrow} & S^n \\
U_\beta\cap U_\gamma & \circlearrowleft & \downarrow g_{\gamma\beta} \\
 & \underset{\varphi_\gamma}{\searrow} & S^n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \overset{\varphi_\alpha}{\nearrow} & S^n \\
U_\alpha\cap U_\gamma & \circlearrowleft & \downarrow g_{\gamma\alpha} \\
 & \underset{\varphi_\gamma}{\searrow} & S^n
\end{array}
$$

$g_o$ を $S^n$ の通常の計量とする. $g_{\beta\alpha}$ は $S^n$ の共形変換だから, $g_{\beta\alpha}^* g_o = \lambda_{\beta\alpha}\cdot g_o$ をみたす関数 $\lambda_{\beta\alpha} > 0$ が $S^n$ 上に存在する. 定義より $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta}\cdot g_{\beta\alpha}$ だから,

$$\lambda_{\gamma\alpha}\cdot g_o = g_{\gamma\alpha}^* g_o = g_{\beta\alpha}^* g_{\gamma\beta}^* g_o = g_{\beta\alpha}^*(\lambda_{\gamma\beta}\cdot g_o) = g_{\beta\alpha}^*\lambda_{\gamma\beta}\cdot\lambda_{\beta\alpha}\cdot g_o$$

よって $S^n$ 上 $\lambda_{\gamma\alpha} = g_{\beta\alpha}^*\lambda_{\gamma\beta}\cdot\lambda_{\beta\alpha}$ となる. 局所関数 $\{\mu\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を

$$\mu_{\beta\alpha} = \lambda_{\beta\alpha}\circ\varphi_\alpha : U_\alpha\cap U_\beta \to \mathbb{R}^+ \ (\alpha,\beta\in\Lambda)$$

により定義する. このとき $\{\mu\}_{\beta,\alpha\in\Lambda}$ は $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ 上で

$$
\begin{aligned}
\mu_{\gamma\alpha} &= \lambda_{\gamma\alpha}\circ\varphi_\alpha = g_{\beta\alpha}^*\lambda_{\gamma\beta}\cdot\lambda_{\beta\alpha}\circ\varphi_\alpha \\
&= (\lambda_{\gamma\beta}(g_{\beta\alpha})\cdot\lambda_{\beta\alpha})\circ\varphi_\alpha = \lambda_{\gamma\beta}(g_{\beta\alpha}\circ\varphi_\alpha)\cdot\lambda_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha) \\
&= \lambda_{\gamma\beta}(\varphi_\beta)\cdot\lambda_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha) = \mu_{\gamma\beta}\cdot\mu_{\beta\alpha}
\end{aligned}
$$

となる. $\{\mu\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ はしたがって, 1-cocycle を定義する. 一方, 局所実連続関数の germ の sheaf $\mathbb{R}_R^+$ は fine sheaf なので, 1 次コホモロジー $H^1(\mathcal{U},\mathbb{R}_R^+) = 0$ である (ここで $\mathcal{U}$ は $M$ のすべての開被覆にわたる被覆がつくる chain complex). 故に,

局所関数 $\{f\}_{\alpha\in\Lambda}$ が存在して, $\delta f(\beta,\alpha)=\mu_{\beta\alpha}$, i.e. $U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $f_\alpha\cdot f_\beta^{-1}=\mu_{\beta\alpha}$ である. よって,

$$\begin{aligned}\varphi_\beta^* g_o &= \varphi_\alpha^* g_{\beta\alpha}^* g_o=\varphi_\alpha^*(\lambda_{\beta\alpha}\cdot g_o)\\ &= \lambda_{\beta\alpha}\circ\varphi_\alpha\cdot\varphi_\alpha^* g_o=\mu_{\beta\alpha}\cdot\varphi_\alpha^* g_o\\ &= f_\alpha\cdot f_\beta^{-1}\cdot\varphi_\alpha^* g_o.\end{aligned}$$

$U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $f_\beta\cdot\varphi_\beta^* g_o=f_\alpha\cdot\varphi_\alpha^* g_o$ である. $M=\{U_\alpha\}$ に対し, $g|U_\alpha=f_\alpha\cdot\varphi_\alpha^* g_o$ とおくことにより, $M$ 上にリーマン計量 $g$ が定義され, 局所共形的に $g_o$ である. $g_o$ は立体射影により, $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量に局所共形である. よって $(M,[g])$ は共形平坦多様体である (後半は $n\geq 2$ でもよい). **証明終**

**注４)** $n$ 次元多様体の共形平坦構造は

(1) $n\geq 3$ ならば モデルによる定義=リーマン計量による定義.

(2) $n=2$: モデルによる定義とリーマン計量による定義の概念は異なるが、モデル $\rightarrow$ リーマン計量の定義は出るが, 逆は成り立たない. しかし、２次元多様体は常にどちらの定義でも共形平坦構造をもつ。

(3) $n=1$: １次元多様体は常に共形平坦多様体である. (なぜなら, 共形 (角度) の定義は空集合だから.)