Willmore予想について (圧縮版)

安藤　直也 (熊本大学理学部数理科学科)

M をコンパクトかつむきづけ可能な 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \to \mathbf{R}^3$ を M の $\mathbf{R}^3$ へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率とする. このとき $\mathcal{W}(\iota)$ によって ι に関する M の全平均曲率を表す:

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^2 \, dA,$$

ただし dA は ι によって導かれた計量に関する M の面積要素である. $\mathcal{W}$ は M の $\mathbf{R}^3$ への各はめこみに実数を一つ対応させるいわゆる汎関数であるが, この汎関数 $\mathcal{W}$ を Willmore 汎関数とよぶ. Willmore は $\mathcal{W}(\iota) \geqq 4\pi$ を示し, さらに $\mathcal{W}(\iota) = 4\pi$ は $\iota(M)$ が全臍的な球面 (round sphere) であるときに限ることを示した (1965, 1968). また Willmore は次の式で定義される $\mathbf{R}^3$ のトーラス $T_{a,b}$ $(a > b > 0)$ の全平均曲率を調べた (1965):

$$x = (a + b\cos u)\cos v, \qquad y = (a + b\cos u)\sin v, \qquad z = b\sin u.$$

次がなりたつ:

$$\int_{T_{a,b}} H^2 \, dA = \frac{\pi^2}{(b/a)\sqrt{1-(b/a)^2}}.$$

この右辺は $b = a/\sqrt{2}$ のときに $2\pi^2$ に等しく, $b \neq a/\sqrt{2}$ のときに $2\pi^2$ より真に大きい. よって

$$\int_{T_{a,b}} H^2 \, dA \geqq 2\pi^2$$

であり, さらに等号成立は $b = a/\sqrt{2}$ のときに限る. より一般に, Shiohama-Takagi および Willmore は $\mathbf{R}^3$ の単純閉曲線の開管状近傍の境界を構成するはめこまれた輪環面の全平均曲率は $2\pi^2$ 以上であることを示し, さらに等号成立は輪環面がある正数 $a > 0$ に対し $T_{a,a/\sqrt{2}}$ と合同であるときに限ることを示した (1970, 1971).

White は $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ の共形変換に対し

$$\mathcal{W}(X \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota)$$

がなりたつことを示した (1973). よって一般に次のような予想が肯定的に解決されることが期待される:

<u>**Willmore 予想**</u> M の種数が 1 であるとき, M の $\mathbf{R}^3$ へのはめこみ ι に対し $\mathcal{W}(\iota) \geqq 2\pi^2 (> 4\pi)$ がなりたちさらに等号成立は $\iota(M)$ が $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ の共形変換によって $T_{\sqrt{2},1}$ とうつりあうときに限る.

Li-Yau は ι によって導かれた計量が定める共形構造がある種のものであるとき Willmore 予想は正しいことを示した (1982). さらに Montiel-Ros はより多くの共形構造を持つ輪環面に対し Willmore 予想は正しいことを示した (1986).

コンパクトな 2 次元可微分多様体 M に対し,

$$\mathcal{W}_M := \inf \left\{ \mathcal{W}(\iota) \; ; \; \iota : M \to \mathbf{R}^3 \text{ は } M \text{ の } \mathbf{R}^3 \text{ へのはめこみ} \right\}$$

とおく. このとき Kusner は M がむきづけ可能であるならば $\mathcal{W}_M < 8\pi$ がなりたつことを示し, また M がむきづけ不可能であるならば次がなりたつことを示した (1989):

$$\mathcal{W}_M < \begin{cases} 12\pi & (M \text{ の Euler 数が偶数である場合}), \\ 16\pi & (M \text{ の Euler 数が奇数である場合}). \end{cases}$$

さらに Simon は M がコンパクトむきづけ可能かつ種数が 1 であるならば, $\mathcal{W}_M$ を達成するうめこみ $\iota : M \to \mathbf{R}^3$ が存在することを示した (1985, 1993).

最近, Schmidt は Willmore 予想を肯定的に解決する論文を発表した (2002).

〒 860-8555 熊本市黒髪 2–39–1

熊本大学理学部数理科学科

E-mail address: ando@math.sci.kumamoto-u.ac.jp